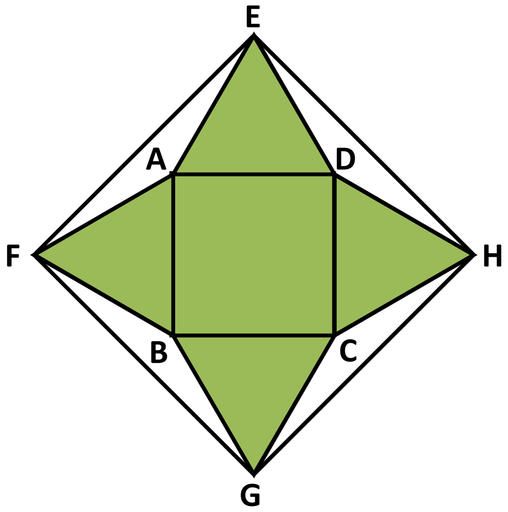
Questão proposta por: Felipe Mascagna Bittencourt Lima	
Instituto: IFSP – Campus São João da Boa Vista	

QUESTÃO 01

Na figura, o quadrilátero ABCD é um quadrado de lado de comprimento 1 e os triângulos ADE, ABF, BCG e CDH são equiláteros.



A área do quadrilátero EFGH é:

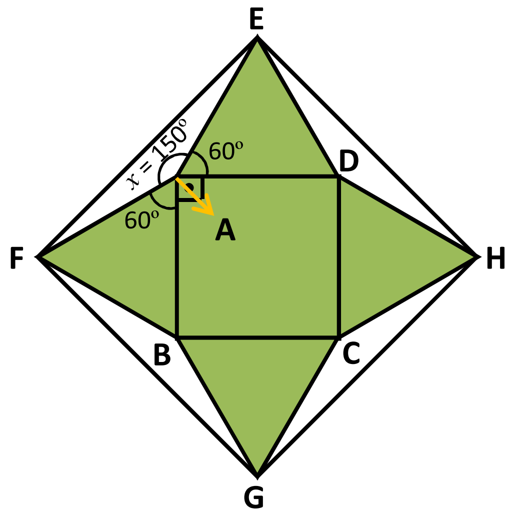
A) $1+\sqrt{3}$
B) $2+\sqrt{3}$
C) $3+\sqrt{3}$
D) $1+2\sqrt{3}$
E) $2+4\sqrt{3}$

GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Como o lado do quadrado mede a 1, os lados de todos os triângulos equiláteros também medem 1. Agora, lembrando-se que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60º e que os ângulos internos de um quadrado medem 90º, chamando o ângulo $E\widehat{A}F$ de x, temos que:

$$60^\circ + 60^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow \boxed{x = 150^\circ}$$



Vamos apresentar dois modos de seguir a resolução partir daqui:

1º Modo:

A área do triângulo AEF é

$$A_{AEF} = \frac{1\cdot 1\cdot \operatorname{sen}(150^\circ)}{2} = \frac{1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Note que os triângulos BFG, CGH e DEH são congruentes ao triângulo AEF e, assim, possuem a mesma área. Logo, a área do quadrilátero EFGH é:

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} + 4 \cdot A_{Triâng.\,Equil.} + 4 \cdot A_{AEF}$$

$$A_{EFGH} = 1^2 + 4 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\boxed{A_{EFGH} = 2 + \sqrt{3}}$$

<u>2º Modo</u>:

Como o triângulo AEF é isósceles, os ângulos $A\widehat{E}F$ e $A\widehat{F}E$ têm a mesma medida e são tais que a soma dos ângulos internos do triângulo AEF é 180º. Deste modo, cada um deles mede 15º.

Note que os triângulos BFG, CGH e DEH são congruentes ao triângulo AEF. Assim, o ângulo $F\widehat{E}H$ mede $15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, o mesmo acontecendo com os demais ângulos internos do quadrilátero EFGH. Também pela congruência mencionada, os lados do quadrilátero EFGH têm, todos, o mesmo comprimento.

Assim, EFGH é um quadrado. Chamando de L o comprimento de seu lado, temos, pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo AEF:

$$L^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ$$

$$L^2 = 2 - 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\boxed{L^2 = 2 + \sqrt{3}}$$

Como o quadrilátero EFGH é um quadrado, sua área é igual a L^2. Logo:

$$\boxed{A_{AFGH} = 2 + \sqrt{3}}$$