II OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS INSTITUTOS FEDERAIS
SIMULADO 1ª FASE 2019
RESOLUÇÃO DO SIMULADO

QUESTÃO 01 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: C

Quantidade de placas possíveis segundo o modelo novo (sem embaralhamento): $26^4 \cdot 10^3$.

Quantidade de placas possíveis segundo o modelo antigo: $26^3 \cdot 10^4$.

Razão pedida: $\frac{26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{[26^3 \cdot 10^3(26-10)]}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$.

QUESTÃO 02 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: C

Substituindo o valor de $\boldsymbol{a}$ e desenvolvendo a função encontra-se

$$f = \frac{0{,}31Tc}{Es} * \left(\frac{100 + Id + 0{,}31Tc}{100}\right)$$

$$f = \frac{0{,}31Tc + 0{,}31 * Id * Tc + 0{,}0961Tc^2}{100Es}$$

$$f = \frac{0{,}0961Tc^2 + 0{,}31(1 + Id)Tc}{100Es}$$

Cujas raízes são encontradas pela resolução da equação incompleta

$$\frac{0{,}0961Tc^2 + 0{,}31(1 + Id)Tc}{100Es} = 0$$

$$Tc[0{,}0961Tc + 0{,}31(1 + Id)] = 0$$

$$Tc = 0 \text{ ou } Tc = \frac{-0{,}31(1+Id)}{0{,}0961} \Leftrightarrow Tc = \frac{-(1+Id)}{0{,}31}$$

QUESTÃO 03 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Ao perguntar o tempo de contribuição e manter fixas as outras variáveis, determina-se o fator previdenciário como função do tempo de contribuição.

- f = variável dependente;
- $Es = 75 - 50 = 25$, (onde 75 é o número inteiro de anos);
- $Tc = 50 - 20 = 30$
- $Id = 50$
- $a = 0,31$

Ao substituir os valores:

$$f = \frac{0,31 * 30}{25} * \left(\frac{100 + 50 + 0,31 * 30}{100}\right)$$

$$f = \frac{9,3}{25} * \left(\frac{159,3}{100}\right)$$

$$f = 0,372 * 1,593$$

$$f = 0,592596$$

Assim, aproximadamente o fator previdenciário representa a porcentagem de 59,26% do salário da professora, isto é, há uma redução de aproximadamente 40,74%.

QUESTÃO 04 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: B e E

Para verificar se houve alteração na posição de Abthyllane, basta calcular a média aritmética entre suas notas e comparar com o resultado da tabela 22,5. Vejamos:

$$M = \frac{18 + 21 + 25 + 26}{4}$$

$$M = \frac{90}{4}$$

$$M = 22,5$$

Diante disso, podemos concluir que o resultado não alterou. Logo, as posições não se alteram.

QUESTÃO 05 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: B

Se o número é par e múltiplo de 5, então o algarismo da unidade é 0.
Se é múltiplo de 4, então o algarismo da dezena deve ser 4 ou 8.
No entanto, se a dezena for preenchida com 8, não sobram alternativas para preencher a centena devido a restrição do intervalo numérico apresentado. Logo, deve ser 940.

QUESTÃO 06 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: C

A solução é introduzir o teorema de Pitágoras, vejamos:
"O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"

$$a^2 = b^2 + c^2$$

De acordo com os dados, temos:

$$a^2 = (2{,}46)^2 + (1{,}20)^2$$

$$a^2 = 6{,}05 + 1{,}44$$

$$a^2 = 7{,}49$$

$$a = \sqrt{7{,}49}$$

$$a \cong 2{,}7\ m$$

Portanto, João irá precisar de 2,7 m de vergalhão para apoiar seu chuveiro externo.

QUESTÃO 07 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Como para cada quadrado preto da subdivisão existem exatamente dois outros quadrados congruentes, um branco e outro lilás; e a união de todos cobre o quadrado original; então a união dos quadrados pretos (ou brancos, ou lilases) preenche a **terça parte** da área do quadrado inicial.

Portanto,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...=\frac{1}{3}.$$

Caso aplicássemos a fórmula da soma dos infinitos termos de uma P.G. Como $a_1 = q = \dfrac{1}{4}$ teríamos o mesmo resultado:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

QUESTÃO 08 – RESOLUÇÃO

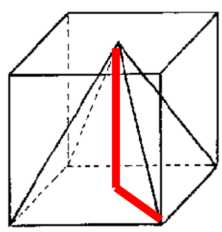
ALTERNATIVA: D

Para determinar a aresta lateral da pirâmide é importante observar que a altura da pirâmide tem mesmo valor que a aresta do cubo e que ela está localizada no vértice da pirâmide e o centro da face da base do cubo. Desse modo, o primeiro passo é determinar a diagonal da face da base do cubo usando o teorema de Pitágoras (usaremos H para altura, d para diagonal da face da base, b para aresta lateral do cubo e a para aresta lateral da pirâmide):

$$d^2 = b^2 + b^2$$
$$d^2 = 4^2 + 4^2$$
$$d^2 = 32$$
$$d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Para, então, determinar a aresta lateral da pirâmide, usando novamente o teorema de Pitágoras, mas, agora, sobre o triângulo retângulo formado pela metade da diagonal, a altura e a aresta lateral da pirâmide:

$$a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2$$
$$a^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4^2$$
$$a^2 = 24$$
$$a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$



QUESTÃO 09 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: A

- Cada bola tem diâmetro de $2r$, como são 3 bolas a altura é $h = 3.2r = 6r$.

- Como $r = 3$ cm, conclui-se que $h = 6.3 = 18cm$.

- O volume do cilindro é dado por $V_c = \pi.r^2.h$.

$$V_c = \pi.3^2.18$$

- Logo, $V_c = 162\pi cm^3$

- O volume da esfera (bola) é dada por $V_e = \frac{4.\pi.r^3}{3}$.

- Logo, $V_e = \frac{4.\pi.3^3}{3}$

$$V_e = 36\pi cm^3$$

- Como são 3 bolas, temos que o volume total das bolas é dado por: $3.V_e = 3.36\pi = 108\pi cm^3$

$$V_c - 3.V_e = 162\pi - 108\pi = 54\pi cm^3$$

- O volume de ar, no espaço vago entre as bolas e a caixa, corresponde a 54π cm³.

QUESTÃO 10 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: E

Segundo as informações do problema, o Pokémon capturado estava posicionado, no momento do lançamento da *pokébola,* em um ângulo cuja cotangente resulta em $\sqrt{3}$. Temos que:

$$\text{cotg } x = \sqrt{3}$$

Lembrando que a cotangente é a razão trigonométrica inversa da tangente podemos escrever:

$$\text{tg } x = \frac{1}{\text{cotg } x} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A tangente obtida é do ângulo notável de 30º e deve-se realizar sua conversão de graus para radianos. Utilizando regra de três simples teremos:

$$180° \;-\; \pi \text{ rad}$$

$$30° \;-\; x\text{rad}$$

$$\frac{180}{30} = \frac{\pi}{x}$$

$$180.x = 30.\pi$$

$$x = \frac{30\pi}{180}$$

$$x = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

Portanto, o Pokémon que estava posicionado sob este ângulo era o Jigglypuff.

QUESTÃO 11 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Diminuir 1% a cada 30 min significa que a temperatura é multiplicada por 0,99 a cada 30 min.
Seja n a quantidade de 30 min necessária para que a temperatura inicial de 3 000 °C atinja 30 °C.

$$3\,000 \,.\, (0{,}99)^n = 30$$

$$(0{,}99)^n = \frac{30}{3000}$$

$$n \cdot log\ (0{,}99) = log\,\frac{1}{100}$$

$$n \cdot log\ (0{,}99) = -2$$

Como ,

$$\log 0{,}99 = log\,\frac{99}{100} = log 99 - log 100 = log(3^2 \cdot 11) - 2 = 2 \cdot log 3 + \log 11 - 2 =$$

$$= 2 \cdot\ 0{,}477 + 1{,}041 - 2 = -0{,}005$$

Temos que

$$-0{,}005n = -2 \Leftrightarrow n\ =\ 400$$

Assim, são necessárias 400 meias horas, ou seja, 200 horas.