

QUESTÃO 1

a) Após o preenchimento de todo o tabuleiro seguindo esta regra, sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ os números presentes nesta diagonal, sendo a_k o número localizado na linha k e coluna k . Deste modo, temos, por exemplo, que $a_6 = 1$.

É possível notar que, com relação ao número central (a_6), os números escritos nas casas localizadas na “diagonal abaixo” (uma casa para direita e uma para baixo) são os quadrados dos números ímpares. Assim:

$$a_7 = 3^2 = 9$$

$$a_8 = 5^2 = 25$$

$$a_9 = 7^2 = 49$$

$$a_{10} = 9^2 = 81$$

$$a_{11} = 11^2 = 121$$

Por outro lado, com relação ao número central (a_6), os números escritos nas casas localizadas na “diagonal acima” (uma casa para esquerda e uma para cima) são os quadrados dos números pares acrescidos de uma unidade. Assim:

$$a_5 = 2^2 + 1 = 5$$

$$a_4 = 4^2 + 1 = 17$$

$$a_3 = 6^2 + 1 = 37$$

$$a_2 = 8^2 + 1 = 65$$

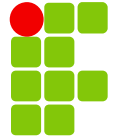
$$a_1 = 10^2 + 1 = 101$$

Logo, a soma de todos os números presentes na diagonal assinalada pela seta na figura é:

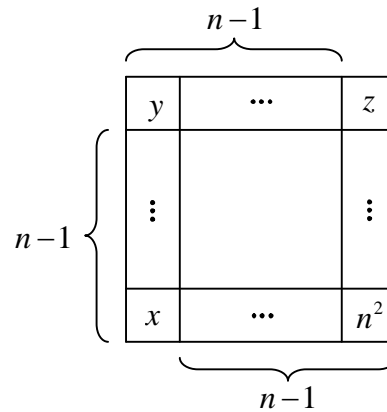
$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} + a_{11}$$

$$S = 101 + 65 + 37 + 17 + 5 + 1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121$$

$$\boxed{S = 511}$$



b) Em um tabuleiro $n \times n$, com n ímpar, seguindo a mesma regra de construção dos números a partir da casa central, sabemos que o número localizado no canto inferior direito é n^2 , já que podemos usar a mesma ideia do item anterior.



Como a última linha possui n elementos, o número do canto inferior esquerdo é

$$x = n^2 - (n-1)$$

$$\boxed{x = n^2 - n + 1}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, o número do canto superior esquerdo é:

$$y = x - (n-1)$$

$$y = n^2 - n + 1 - n + 1$$

$$\boxed{y = n^2 - 2n + 2}$$

E o número do canto superior direito é:

$$z = y - (n-1)$$

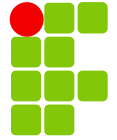
$$z = n^2 - 2n + 2 - n + 1$$

$$\boxed{z = n^2 - 3n + 3}$$

Portanto, a soma dos números localizados na casa do canto inferior esquerdo e na casa do canto superior direito é:

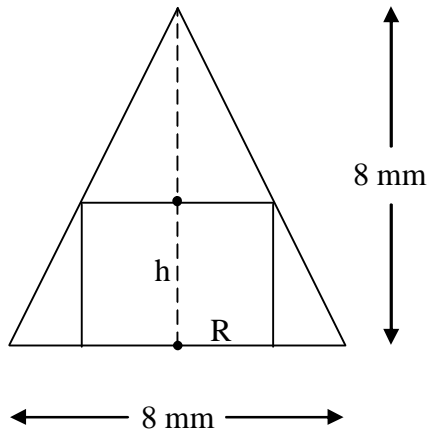
$$x + z = n^2 - n + 1 + n^2 - 3n + 3$$

$$\boxed{x + z = 2n^2 - 4n + 4}$$



QUESTÃO 2

a) Considerando a seção meridiana do cone com o furo cilíndrico ilustrada abaixo e usando semelhança de triângulos, temos que:



$$\begin{aligned} \frac{8}{8} &= \frac{8-h}{2R} \\ \Rightarrow 2R &= 8-h \\ \Rightarrow \boxed{h = 8 - 2R} \end{aligned}$$

b) A área lateral do furo cilíndrico é dada por:

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi R h \\ A_L &= 2\pi R (8 - 2R) \\ \boxed{A_L} &= \boxed{-4\pi R^2 + 16\pi R} \end{aligned}$$

c) A área lateral do furo cilíndrico é uma função quadrática do seu raio. Como o coeficiente do termo quadrático é negativo, a área lateral terá um valor máximo, o que ocorre quando R for igual a:

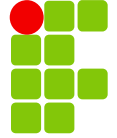
$$R_v = \frac{-16\pi}{2 \cdot (-4\pi)} \Rightarrow \boxed{R_v = 2 \text{ mm}}$$

Neste caso, a altura do furo cilíndrico será:

$$h_v = 8 - 2R_v \Rightarrow \boxed{h_v = 4 \text{ mm}}$$

Logo, a área lateral máxima do furo cilíndrico será:

$$A_{L_Máxima} = -4\pi \cdot 2^2 + 16\pi \cdot 2 \Rightarrow \boxed{A_{L_Máxima} = 16\pi \text{ mm}^2}$$



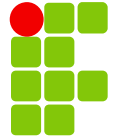
d) Vamos, primeiramente, calcular os volumes do cone e do furo cilíndrico de área lateral máxima:

$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{Cone} = \frac{128\pi}{3} \text{ mm}^3$$

$$V_{Furo} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \Rightarrow V_{Furo} = 16\pi \text{ mm}^3$$

O percentual pedido é:

$$\frac{V_{Furo}}{V_{Cone}} = \frac{16\pi}{\frac{128\pi}{3}} = \frac{3}{8} = 0,375 = \underline{37,5\%}$$

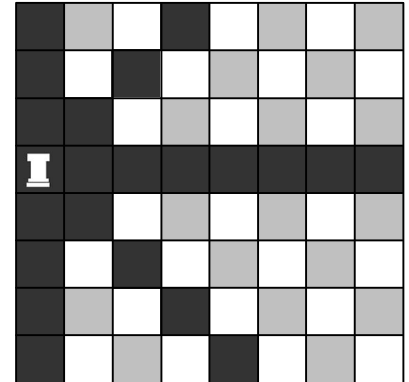


QUESTÃO 3

a) Para cada uma das 28 casas da Região 1 em que a Torre for posicionada, há 22 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64 - 22 = 42$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 1 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

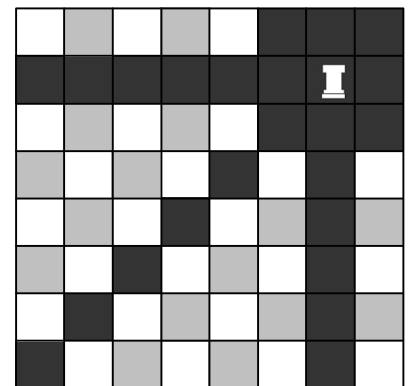
$$28 \cdot 42 = 1176$$



b) Para cada uma das 20 casas da Região 2 em que a Torre for posicionada, há 24 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64 - 24 = 40$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 2 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

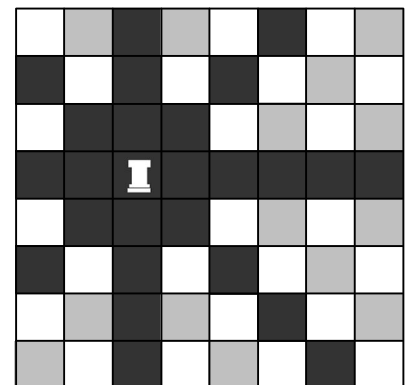
$$20 \cdot 40 = 800$$

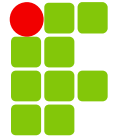


c) Para cada uma das 12 casas da Região 3 em que a Torre for posicionada, há 26 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64 - 26 = 38$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 3 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

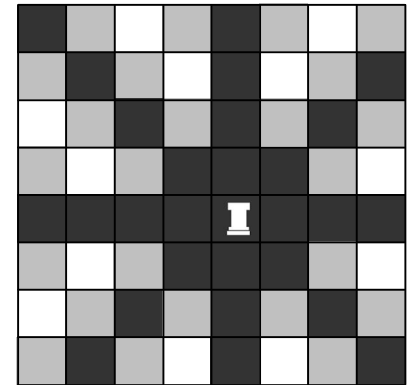
$$12 \cdot 38 = 456$$





Para cada uma das 4 casas da Região 4 em que a Torre for posicionada, há 28 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64 - 28 = 36$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

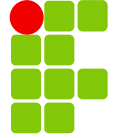
Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 4 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:



$$4 \cdot 36 = 144$$

Ora, ao posicionarmos uma Torre no tabuleiro, ela obrigatoriamente ficará ou na Região 1 ou na 2 ou na 3 ou na 4. Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma Torre e um Bispo neste tabuleiro, de modo que eles não fiquem na mesma linha, coluna ou diagonal é:

$$1176 + 800 + 456 + 144 = 2576$$



QUESTÃO 4

a) Como o triângulo ADC é retângulo em D, podemos concluir, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$\boxed{AC = 10}$$

Sabemos que, em todo retângulo, os lados opostos são paralelos e os seus quatro ângulos internos são retos. Assim, pelas informações do enunciado, temos que \overline{PG} é paralelo a \overline{CD} e, por serem ambos os segmentos cortados por uma mesma transversal (\overline{AC}), concluímos que os ângulos \widehat{APG} e \widehat{ACD} são correspondentes e, portanto, têm mesma medida. Os ângulos \widehat{AGP} e \widehat{ADC} são também, pelo mesmo motivo, correspondentes e, portanto têm mesma medida (ambos iguais a 90°). Deste modo, os triângulos APG e ACD são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo. Portanto:

$$\frac{PG}{CD} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{PG}{8} = \frac{x}{10} \Rightarrow \boxed{PG = \frac{4x}{5}}$$

b) Usando a mesma semelhança de triângulos do item anterior, temos que:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{AG}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow \boxed{AG = \frac{3x}{5}}$$

c) A região cinza da figura, que tem área $A(x)$, é formada pela união dos triângulos APG, BPE e CPF. Calculemos cada uma dessas áreas, em função de x , para $0 \leq x \leq 10$:

$$A_{\triangle APG} = \frac{1}{2} \cdot PG \cdot AG$$

$$A_{\triangle APG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} \cdot \frac{3x}{5}$$

$$\boxed{A_{\triangle APG} = \frac{6x^2}{25}}$$

$$A_{\triangle BPE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EP$$

$$A_{\triangle BPE} = \frac{1}{2} \cdot \left(8 - \frac{4x}{5}\right) \cdot \frac{3x}{5}$$

$$A_{\triangle BPE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{24x}{5} - \frac{12x^2}{25}\right)$$

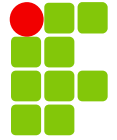
$$\boxed{A_{\triangle BPE} = \frac{12x}{5} - \frac{6x^2}{25}}$$

$$A_{\triangle CPF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FP$$

$$A_{\triangle CPF} = \frac{1}{2} \cdot \left(8 - \frac{4x}{5}\right) \cdot \left(6 - \frac{3x}{5}\right)$$

$$A_{\triangle CPF} = \frac{1}{2} \cdot \left(48 - \frac{24x}{5} - \frac{24x}{5} + \frac{12x^2}{25}\right)$$

$$\boxed{A_{\triangle CPF} = 24 - \frac{24x}{5} + \frac{6x^2}{25}}$$



Logo, para $0 \leq x \leq 10$:

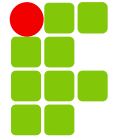
$$A(x) = A_{\Delta APG} + A_{\Delta BPE} + A_{\Delta CPF}$$
$$A(x) = \frac{6x^2}{25} + \frac{12x}{5} - \frac{6x^2}{25} + 24 - \frac{24x}{5} + \frac{6x^2}{25}$$
$$\boxed{A(x) = \frac{6}{25}x^2 - \frac{12}{5}x + 24}$$

d) $A(x)$ é uma função quadrática de x . Como o coeficiente do termo quadrático é positivo, $A(x)$ terá um valor mínimo, o que ocorre quando x for igual a:

$$x_v = \frac{-\left(-\frac{12}{5}\right)}{2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)} = \frac{\cancel{12} \cdot 25}{5 \cdot \cancel{12}} \Rightarrow \boxed{x_v = 5}$$

Neste caso, teremos a área mínima igual a:

$$A_{\text{Mín}} = \frac{6}{25} \cdot \cancel{5^2} - \frac{12}{5} \cdot \cancel{5} + 24$$
$$A_{\text{Mín}} = 6 - 12 + 24$$
$$\boxed{A_{\text{Mín}} = 18}$$



QUESTÃO 5

a) Primeiramente, note que \widehat{EBC} e $\widehat{B_1BC}$ referem-se ao mesmo ângulo. Como $\widehat{B_1AC}$ e $\widehat{B_1BC}$ são dois ângulos inscritos na circunferência que interceptam o mesmo arco $\widehat{B_1C}$, eles necessariamente têm a mesma medida. Logo, $\widehat{B_1AC}$ e \widehat{EBC} tem a mesma medida

b) Os triângulos DAC e EBC possuem um ângulo reto cada um (com vértice em D e E, respectivamente) e um ângulo em comum (com vértice em C). Logo, pelo caso AA (ângulo-ângulo), estes triângulos são semelhantes e, portanto, o terceiro ângulo de cada um deles devem ser iguais entre si também. Logo, \widehat{DAC} e \widehat{EBC} tem a mesma medida.

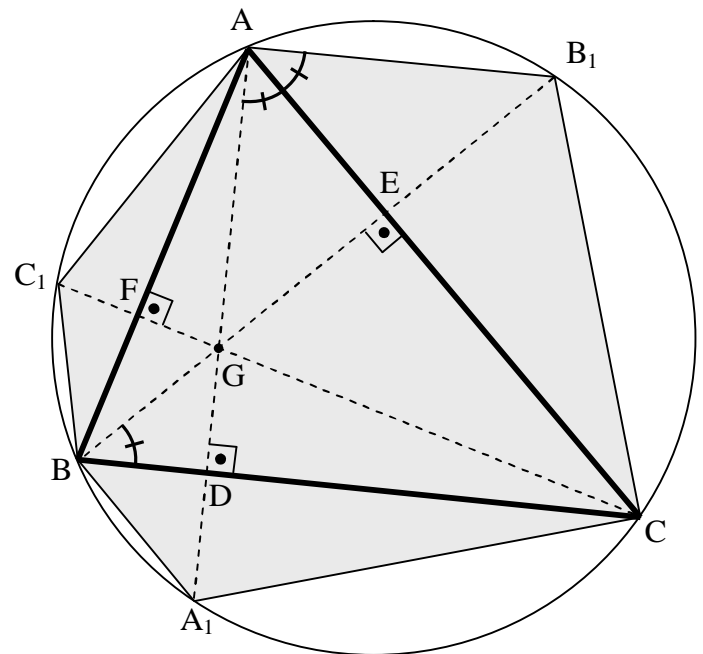
c) Os triângulos AEG e AEB₁ são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), já que os seus ângulos de vértice em A possuem medidas iguais, como mostrado nos itens anteriores, apresentam o lado \overline{AE} em comum e possuem ângulo reto de vértice E.

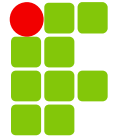
Logo, os segmentos \overline{EG} e $\overline{EB_1}$ possuem mesmo comprimento e, portanto, os triângulos AGC e AB₁C possuem mesma área, pois apresentam mesma base (\overline{AC}) e alturas de mesmo comprimento.

De maneira análoga, pode-se provar que as áreas dos triângulos AGB e AC₁B são iguais e que as áreas de BGC e BA₁C são iguais.

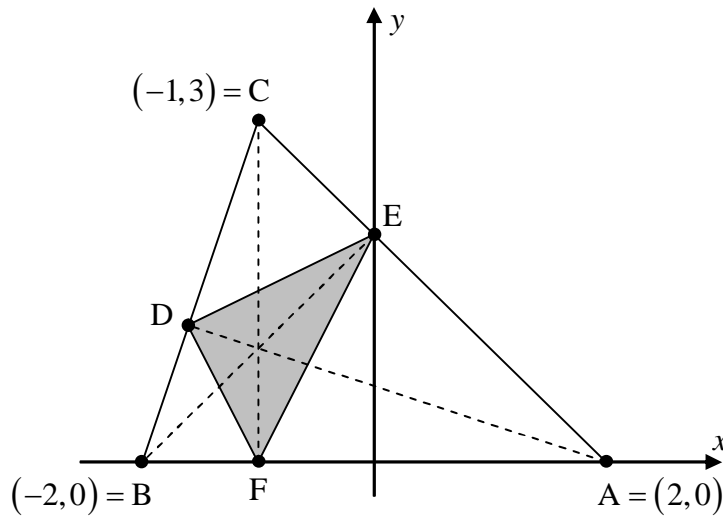
Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} S_{BC_1AB_1CA_1} &= S_{AGC} + S_{AB_1C} + S_{BGC} + S_{BA_1C} + S_{AGB} + S_{AC_1B} \\ &= S_{AGC} + S_{AGC} + S_{BGC} + S_{BGC} + S_{AGB} + S_{AGB} \\ &= 2 \cdot (S_{AGC} + S_{BGC} + S_{AGB}) \\ &= 2 \cdot S_{ABC} \end{aligned}$$





d) Sejam D, E e F os três pés das alturas do triângulo ABC, como indicado na figura a seguir.



Pode-se facilmente perceber que as coordenadas do ponto F são:

$$F = (-1, 0)$$

Para que possamos descobrir as coordenadas dos pontos D e E, a fim calcular a área do triângulo órtico posteriormente, devemos, primeiramente, encontrar as equações das retas \overline{AC} , \overline{BE} , \overline{BC} e \overline{AD} para, depois, encontrar as suas intersecções.

Determinação do ponto E:

A equação da reta \overline{AC} é do tipo $y = m_{AC}x + n_{AC}$. Temos que:

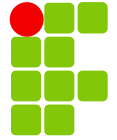
$$m_{AC} = \frac{3-0}{-1-2} \Rightarrow \boxed{m_{AC} = -1}$$

Como \overline{AC} contém o ponto $A = (2, 0)$, temos que

$$0 = -1 \cdot 2 + n_{AC} \Rightarrow \boxed{n_{AC} = 2}$$

Logo, a equação da reta \overline{AC} é

$$\boxed{y = -x + 2}$$



A equação da reta \overline{BE} é do tipo $y = m_{BE}x + n_{BE}$. Como \overline{BE} é perpendicular a \overline{AC} , temos que:

$$m_{BE} = \frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \boxed{m_{BE} = 1}$$

Como \overline{BE} contém o ponto $B = (-2, 0)$, temos que

$$0 = 1 \cdot (-2) + n_{BE} \Rightarrow \boxed{n_{BE} = 2}$$

Logo, a equação da reta \overline{BE} é

$$\boxed{y = x + 2}$$

O ponto E pode ser obtido resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ e } \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{E = (0, 2)}$$

Determinação do ponto D:

A equação da reta \overline{BC} é do tipo $y = m_{BC}x + n_{BC}$. Temos que:

$$m_{BC} = \frac{3-0}{-1-(-2)} \Rightarrow \boxed{m_{BC} = 3}$$

Como \overline{BC} contém o ponto $B = (-2, 0)$, temos que

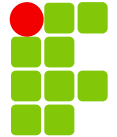
$$0 = 3 \cdot (-2) + n_{BC} \Rightarrow \boxed{n_{BC} = 6}$$

Logo, a equação da reta \overline{BC} é

$$\boxed{y = 3x + 6}$$

A equação da reta \overline{AD} é do tipo $y = m_{AD}x + n_{AD}$. Como \overline{AD} é perpendicular a \overline{BC} , temos que:

$$m_{AD} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{m_{AD} = -\frac{1}{3}}$$



Como \overline{AD} contém o ponto $A = (2, 0)$, temos que

$$0 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + n_{AD} \Rightarrow n_{AD} = \frac{2}{3}$$

Logo, a equação da reta \overline{AD} é

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

O ponto D pode ser obtido resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} y = 3x + 6 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -1,6 \text{ e } y = 1,2 \Rightarrow D = (-1,6; 1,2)$$

A área do triângulo órtico (DEF) é:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1,6 & -1 \\ 0 & 2 & 1,2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} |-2 + 3,2 + 1,2|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2,4$$

$$S = 1,2$$