II OMIF – 2019 – RESOLUÇÃO DA PROVA

QUESTÃO 01 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Como 3μ tem que tem valor terminado em μ, então $\mu = 0$ ou $\mu = 5$.
Contudo, μ não pode ser zero, pois, se fosse, todos os algarismos teriam que ser zero. Então, $\mu = 5$.
Assim, $3\mu = 15$, e, consequentemente, $1 + 3\beta$ tem que terminar com 5. Para tanto, 3β tem que ter valor terminado em 4, o que sugere que seja um múltiplo de 3 que termine com a unidade 4, logo $\beta = 8$.
Por último, $2 + 3\alpha$ tem que dar 5, o que implica que 3α tem que ter valor 3, logo $\alpha = 1$.
Portanto, $\alpha + \beta + \mu = 5 + 8 + 1 = 14$.

QUESTÃO 02 – GABARITO: A

RESOLUÇÃO:

Denotando os segmentos $\overline{OP} = x$, $\overline{PQ} = y$ e $\overline{QR} = z$
Como os segmentos $\overline{OP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são transversais aos segmentos paralelos $\overline{AO}$, $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$ e $\overline{DR}$, podemos afirmar, pelo Teorema de Tales, que

$$\frac{(40 + 30 + 20)}{120} = \frac{40}{x} = \frac{30}{y} = \frac{20}{z}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{40}{x} = \frac{30}{y} = \frac{20}{z}$$

$$x = \frac{160}{3} m, y = 40\ m\ e\ z = \frac{80}{3}\ m$$

QUESTÃO 03 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

Podemos observar que "quarenta e oito" tem 13 letras, "quarenta e nove" tem 13 letras, "cinqüenta" tem 9 letras, "cinquenta e um" tem 12 letras e "cinquenta e quatro" tem 16 letras. Dessa forma, como $13 + 13 + 9 + 16 = 51$, a alternativa correta é "cinquenta e um".

QUESTÃO 04 – GABARITO: C

RESOLUÇÃO:

O algarismo ocupante da unidade de milhar poderá ser 2 ou 3, pois o número procurado está entre 2000 e 4000. Como o algarismo da unidade de milhar possui uma unidade a menos que o algarismo das dezenas, o valor do algarismo das dezenas só poderá ser 3 ou 4. Como o algarismo das centenas vale o triplo do algarismo das dezenas, o único valor possível seria o $9 = 3 \times 3$, uma vez que $3 \times 4 = 12$ não poderá representar as centenas por apresentar dois algarismos. Desta forma, com os algarismos das centenas sendo 9 e o das dezenas sendo 3, o algarismo da unidade de milhar deverá ser 2, por valer uma unidade a menos que o algarismo das dezenas. Assim, o algarismo da unidade é o valor $8 = 4 \times 2$. Portanto, o número procurado é 2938 e a soma de seus algarismos é $2 + 9 + 3 + 8 = 22$.

QUESTÃO 05 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

Se a equação $x^2 + bx + c = 0$ tem como conjunto solução $S = \{\Delta - 1; \Delta + 1\}$ e o coeficiente $a = 1$, então expressando as raízes através da fórmula de Bhaskara $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \Delta + 1 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \Delta - 1 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações obtemos:

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \Delta + 1 - (\Delta - 1)$$

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2} = \Delta + 1 - \Delta + 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$\Delta = 4$$

Logo, $S = \{\Delta - 1; \Delta + 1\} = \{4 - 1;\ 4 + 1\} = \{3;\ 5\}$. E a soma das raízes é $3 + 5 = 8$.

QUESTÃO 06 – GABARITO: C

RESOLUÇÃO:

Para resolver a questão basta utilizar o conhecimento de ponto médio da geometria analítica. Desta forma, temos:

Coordenadas da torre	
$x_m = \frac{x_A + x_B}{2}$ $x_m = \frac{16+12}{2}$ $x_m = 14$	$y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$ $y_m = \frac{35+21}{2}$ $y_m = 28$

QUESTÃO 07 – GABARITO: E

RESOLUÇÃO:

Por inspeção, temos que $111111 = 7 \times 15873$, isto é, 111111 é um múltiplo de 7.

De modo geral, $\underbrace{111 \dots 111}_{6k\ dígitos} = 7 \times 15873 \times \left(10^{6(k-1)} + \cdots + 10^{12} + 10^6 + 1\right)$ também é um múltiplo de 7.

Portanto, temos que $N = \underbrace{111 \dots 111}_{2019\ dígitos} = \underbrace{111 \dots 111}_{2016\ dígitos} \times 10^3 + 111 = 7m + 6$, pois $2016 = 6 \times 336$.

Em outras palavras, $2019 = 6 \times 336 + 3$, isto é, a divisão de 2019 por 6 tem resto 3, o que significa que 2016 dígitos 1 é divisível por 7, sobrando 111 que dividido por 7 tem resto 6.

Logo, o resto da divisão de N por 7 é 6.

QUESTÃO 08 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

Sabendo que a taxa de depreciação é de 15% e que o valor pago pelo carro foi de R$ 45.000,00, podemos escrever a lei de formação do valor do carro em função do tempo, $V(t)$, por:

$$V(t) = 45000 \cdot (1 - 0{,}15)^t = 45000 \cdot (0{,}85)^t$$

Como o professor venderá o carro quando a depreciação superar 50% do valor de compra, então

$$V(t) < 22500.$$

Desse modo, a desigualdade fica:

$$45000 \cdot (1 - 0{,}15)^t < 22500$$

$$0{,}85^{\mathrm{t}} < \frac{22500}{45000} = \frac{1}{2}$$

$$t \cdot \log_2 0{,}85 < \log_2 1 - \log_2 2$$

$$t \cdot \log_2 0{,}85 < \log_2 1 - \log_2 2$$

$$t \cdot (-0{,}23) < -1$$

$$t > 4{,}35$$

Logo, o professor venderá o seu carro depois de um tempo compreendido entre 4 e 5 anos.

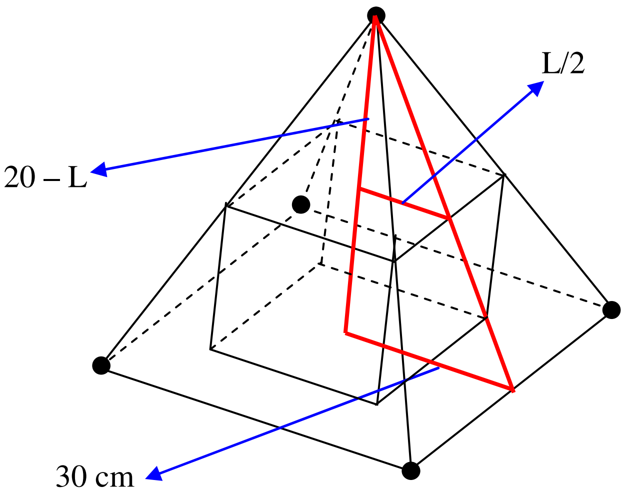
QUESTÃO 09 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Como o volume da pirâmide é igual a 24000 cm³, sendo h a sua altura, temos que:

$$\frac{1}{3} \cdot 60^2 \cdot h = 24000 \Rightarrow h = 20\ cm$$

Agora, observe a figura a seguir, que ilustra a situação descrita no enunciado. Veja que podemos obter dois triângulos semelhantes, destacados na figura.



Temos que:

$$\frac{20}{30} = \frac{20 - L}{\frac{L}{2}} \quad \Rightarrow \quad 10L = 600 - 30L \quad \Rightarrow \quad 40L = 600 \quad \Rightarrow \quad L = 15\ cm$$

QUESTÃO 10 – GABARITO: C

RESOLUÇÃO:

A questão está relacionada com uma progressão geométrica (P.G.) de razão $\frac{1}{2}$. Pois a sequência obtida pelos espaços percorridos pelo veículo foi: 100 km, 50 km, 25 km, 12,5 km, 6,25 km, 3,125 km, ...

Para determinar a distância percorrida, basta somar os termos da P.G.

Como o primeiro termo é 100, isto é, $a_1 = 100$ e a razão é $q = \frac{1}{2}$, então:

Através da soma de P.G. finita: $S_n = \frac{a_1 \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$, temos

$$S_n = \frac{8\,.\,\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1},$$

Como o desenvolvimento da potência $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ possui numerador 1 e o denominador é um número muito grande, pois n tende a infinito, então, o número decimal obtido será um valor **muito próximo** a zero.

Logo,

$$S_n = \frac{100\,.\,(0\,-1)}{-\,\frac{1}{2}} = \frac{-100}{-\,\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200\ km$$

De outra maneira, considerando a sequência com infinitos termos, podemos usar a soma de P.G. infinita.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{2}} = \ 200\ km$$

Portanto, o veículo percorrerá 200 km.

QUESTÃO 11 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Denotando respectivamente por a, b, c, d os totais de participantes nas quatro fases temos:

$$\frac{(a+b)}{2} = 2\cdot(c+d)$$

Somando $2\cdot(a+b)$ nos dois membros então:

$$\frac{(a+b)}{2} + 2\cdot(a+b) = 2\cdot(c+d) + 2\cdot(a+b)$$

$$\frac{(a+b+4a+4b)}{2} = 2\cdot(a+b+c+d)$$

$$\frac{5(a+b)}{2} = 2\cdot(a+b+c+d)$$

$$\frac{5(a+b)}{4} = (a+b+c+d)$$

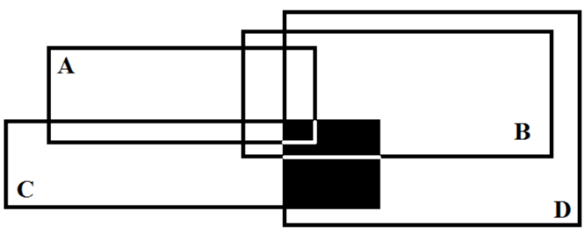
$$\frac{5}{4} = \frac{(a+b+c+d)}{(a+b)}$$

QUESTÃO 12 – GABARITO: D

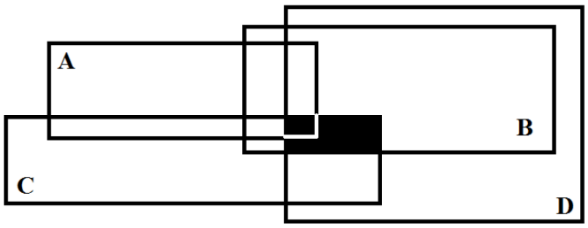
RESOLUÇÃO:

Dividiremos as operações dos conjuntos em partes para facilitar o entendimento:

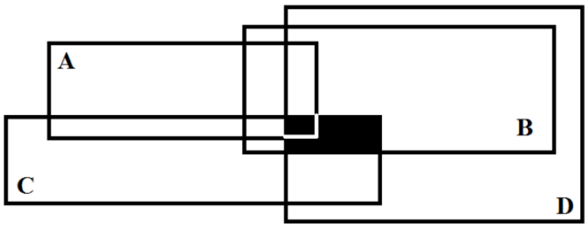
1ª Parte) C∩D



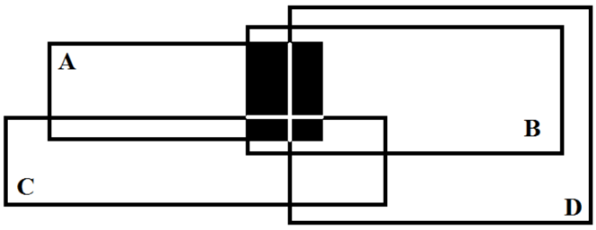
2ª Parte) C∩B



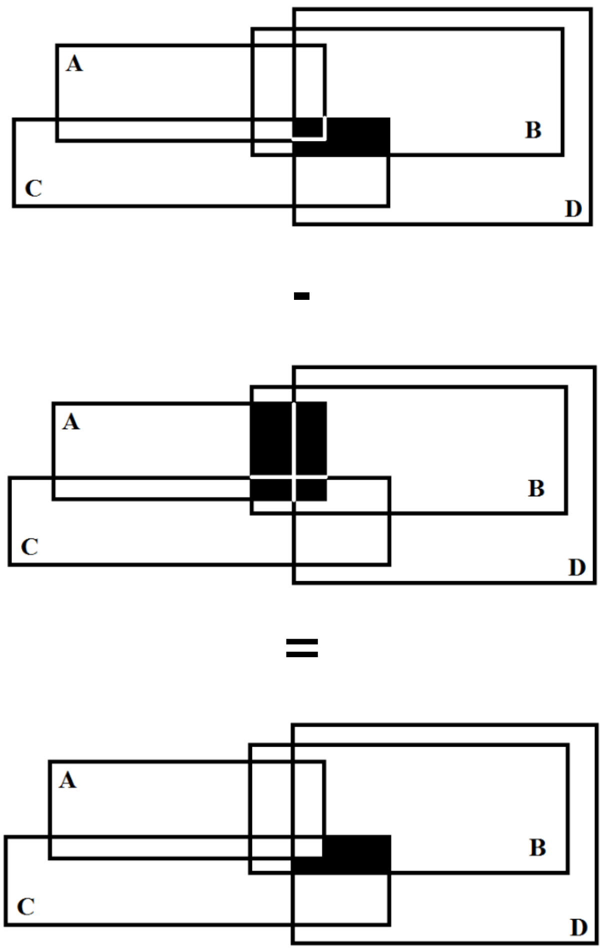
3ª Parte) (C∩D) ∩ (C∩B)



4ª Parte) A∩B



5ª Parte) [(C∩D) ∩ (C∩B)] - (A∩B)



QUESTÃO 13 – GABARITO: A

RESOLUÇÃO:

Vamos representar por A, B e V a quantidade de bolas azuis, brancas e vermelhas na caixa, respectivamente. Sendo assim, temos que Luiz Arthur retirou da caixa $0{,}5A$, $0{,}7B$ e $0{,}8V$.

E, consequentemente, podemos afirmar que:

$$0{,}5A + 0{,}8V = 0{,}62(A + V)$$
$$0{,}5A - 0{,}62A = 0{,}62V - 0{,}8V$$
$$-0{,}12A = -0{,}18V$$
$$A = 1{,}5V$$

E que

$$0{,}7B + 0{,}8V = 0{,}74(B + V)$$
$$0{,}7B - 0{,}74B = 0{,}74V - 0{,}8V$$
$$-0{,}04B = -0{,}06V$$
$$B = 1{,}5V$$

Logo, a porcentagem de bolas na caixa é

$$\frac{0{,}5A + 0{,}7B + 0{,}8V}{A + B + V} = \frac{0{,}5(1{,}5V) + 0{,}7(1{,}5V) + 0{,}8V}{1{,}5V + 1{,}5V + V} = \frac{0{,}75V + 1{,}05V + 0{,}8V}{4V} = 0{,}65 = 65\%.$$

QUESTÃO 14 – GABARITO: E

RESOLUÇÃO:

Sabemos que a idade média dos 10 competidores era, inicialmente, 40 anos, assim:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} = 40 \qquad \text{(i)}$$

Também sabemos que excluindo x_1, a menor idade, e x_{10}, a maior idade, obtemos a média:

$$\frac{x_2 + \cdots + x_9}{8} = 41{,}5$$

Note que multiplicando cruzado:

$$x_2 + \cdots + x_9 = 41{,}5 \cdot 8$$
$$x_2 + \cdots + x_9 = 332 \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (ii) em (i), chegamos a:

$$\frac{x_1 + 332 + x_{10}}{10} = 40$$
$$x_1 + 332 + x_{10} = 400$$
$$x_1 + x_{10} = 68 \qquad \text{(iii)}$$

Em seguida, temos outra média:

$$\frac{x_2+\cdots+x_9+x_i}{9} = 43 \qquad \text{(iv)}$$

onde x_i é a idade de quem voltou para a competição. Novamente, substituindo (ii) em (iv), concluímos que:

$$\frac{332 + x_i}{9} = 43$$

Multiplicando cruzado:

$$332 + x_i = 43\,.\,9$$

$$332 + x_i = 387$$

$$x_i = 55$$

Ou seja, o competidor que voltou para a maratona tem 55 anos e é o concorrente x_{10}, isto é, o mais velho. De (iii), conseguimos descobrir que o corredor desclassificado é o mais novo (x_1) e, dessa forma, tem:

$$x_1 + 55 = 68$$

$$x_1 = 13 \text{ anos.}$$

QUESTÃO 15 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

A soma dos ângulos internos de um polígono é $S = (n-2) \cdot 180°$, como o hexágono tem 6 lados, então $S = 720°$. Como o hexágono é regular, cada ângulo possui o valor de $\frac{720^o}{6}$ = 120º. Na figura 1, o ângulo $A\hat{O}B = 60°$, pois é ângulo central correspondente ao arco $\widehat{AB}$, que por sua vez equivale a terça parte de 180º. O ângulo $O\hat{A}B$ também é igual 60°, já que o diâmetro AD divide ao meio o ângulo $B\hat{A}F = 120°$. Logo, a figura 1 é um triângulo equilátero com medida dos lados igual a 2 cm, assim temos que a sua área possui valor $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ cm^2$.

A figura 2 representa um losango que possui o dobro do valor da figura 1, ou seja, $2\sqrt{3}\ cm^2$.

A figura 3 é um triângulo retângulo em E, porque o ângulo inscrito $A\hat{E}D$ corresponde ao arco de 180°, desta forma, o segmento de reta AE é calculado pelo teorema de Pitágoras

$$4^2 = 2^2 + (AE)^2$$

$$AE = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,cm.$$

Portanto, o triângulo da figura 3 possui área $\frac{2\,.2\sqrt{3}}{2}$ = $2\sqrt{3}$ cm².

A figura 4, também representada por um triângulo, possui área igual à figura 1, por ter mesma base e mesma altura, ou é a metade da área da figura 2. Enfim, as áreas das figuras 1, 2, 3 e 4 respectivamente nessa ordem, são: $\sqrt{3}\ cm^2, 2\sqrt{3}\ cm^2, 2\sqrt{3}\ cm^2\ e\ \sqrt{3}\ cm^2$.

Portanto, o produto dessas áreas é numericamente igual a $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

QUESTÃO 16 – GABARITO: E

RESOLUÇÃO:

Como G é o baricentro do triângulo $A_4A_5A_7$ temos que $A_7G = \frac{2}{3}A_7B = \frac{2}{3}h$.

Segue que $\frac{2}{3}h = 12 \implies h = 18\ cm$.

Temos ainda que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ onde ℓ é o lado do triângulo $A_4A_5A_7$, o qual é equilátero pelo fato do hexágono ser regular.

Dessa forma, temos que $18 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \implies \ell = 12\sqrt{3}\ cm$.

Note ainda que $\ell = 2 \cdot R$, onde R é o rádio das esferas e assim obtemos $R = 6\sqrt{3}\ cm$.

Portanto o volume das sete esferas é:

$$V = 7 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 7 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^3 = 6048\sqrt{3}\pi\ cm^3.$$

QUESTÃO 17 – GABARITO: C

RESOLUÇÃO:

O total de funcionários é o maior possível para que todos recebam a mesma quantia de mudas de cada tipo, logo:

$$mdc\ (180, 120, 90, 60) = 30 \text{ funcionários}$$

Assim, o quantitativo de mudas por funcionário fica:

(180 mudas de café) ÷ (30 funcionários) = 6 mudas de café para cada funcionário

(120 mudas de mandioca) ÷ (30 funcionários) = 4 mudas de mandioca para cada funcionário

(90 mudas de laranjeira) ÷ (30 funcionários) = 3 mudas de laranjeira para cada funcionário

(60 mudas de limoeiro) ÷ (30 funcionários) = 2 mudas de limoeiro para cada funcionário

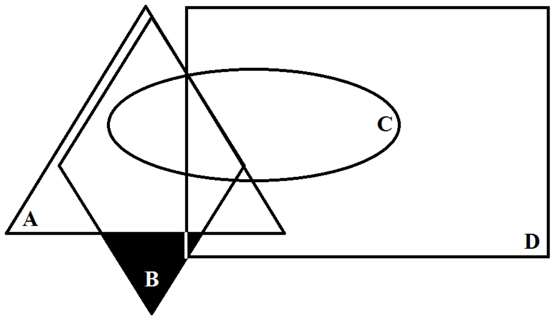
Portanto, o total de mudas por funcionário é: $6 + 4 + 3 + 2 = 15$ mudas por funcionário.

QUESTÃO 18 – GABARITO: E

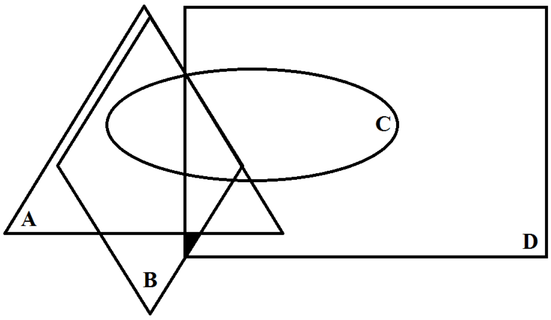
RESOLUÇÃO:

Dividiremos as operações dos conjuntos em partes para facilitar o entendimento:

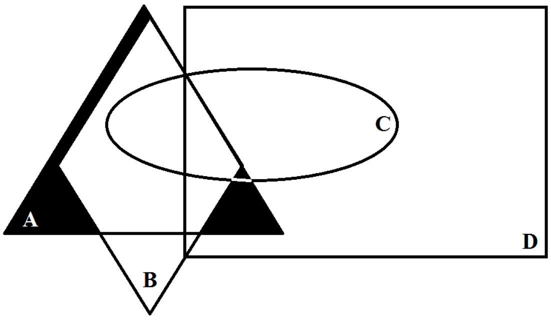
1ª Parte) $B - A$



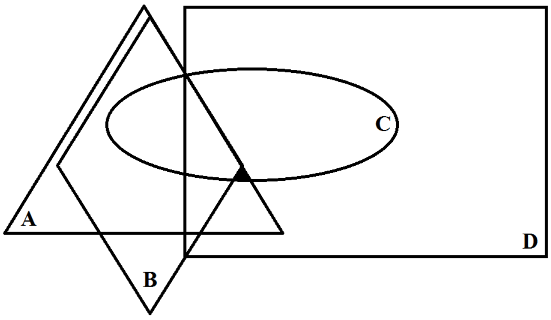
2ª Parte) $(B - A) \cap D$



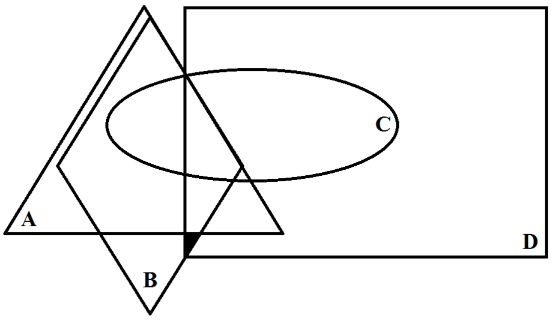
3ª Parte) $A - B$



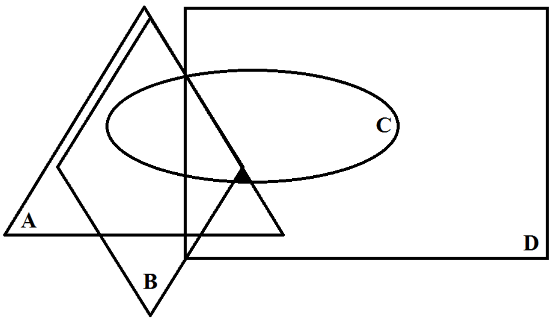
4ª Parte) $(A - B) \cap C$



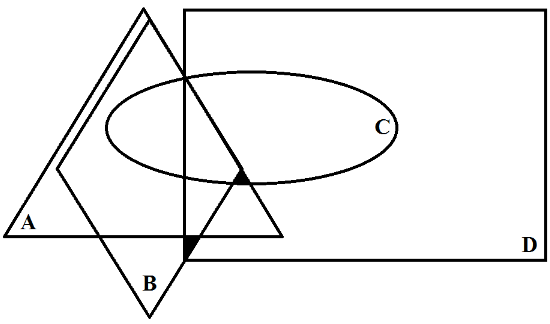
5ª Parte) $[(B - A) \cap D] \cup [(A - B) \cap C]$



$\cup$



$=$



Portanto, a sequência correta é: $-; \cap; \cup; -; \cap$

QUESTÃO 19 – GABARITO: A

RESOLUÇÃO:

O objetivo é determinar $a.b.c$, sabendo que $a = b^c$, $b = c^a$, e $c = a^b$,

Assim, substituindo uma no outra obtemos:

$$a^b = c$$

$$(b^c)^b = c$$

$$((c^a)^c)^b = c$$

$$c^{a \cdot b \cdot c} = c$$

$$a \cdot b \cdot c = 1$$

Logo, $a \cdot b \cdot c = 1$ que é o elemento neutro da multiplicação.

QUESTÃO 20 – GABARITO: C

RESOLUÇÃO:

Para determinar a altura, precisaremos relacionar as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°.

Assim, podemos determinar:

$$tg60° = \frac{h}{y} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{y} \Leftrightarrow \sqrt{3}y = h$$

e

$$tg30° = \frac{h}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x+y} \Leftrightarrow 3h = \sqrt{3}(x+y)$$

$$3h = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y$$

$$3h = \sqrt{3}x + h$$

$$3h - h = \sqrt{3}x$$

$$2h = \sqrt{3}x$$

$$h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Sabemos que o avião está a 250 m/s e que ele gastou 4 segundos para atravessar o tamanho x. Desse modo, $x = 250 \cdot 4 = 1000$ m. Logo,

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot 1000}{2} = 500\sqrt{3} \text{ m}$$

QUESTÃO 21 – GABARITO: A

RESOLUÇÃO:

Vejamos o sinal de cada um dos termos do produto:

- $a < 0$, pois a concavidade da parábola está voltada para baixo.
- $c < 0$, pois a parábola intercepta a parte negativa do eixo y.
- $\Delta > 0$, pois a parábola intercepta o eixo x em dois pontos x_1e x_2.
- $x_1 < 0$, pois encontra-se na parte negativa do eixo x.
- $x_2 < 0$, pois encontra-se na parte negativa do eixo x.
- $x_V < 0$, pois o vértice da parábola encontra-se na parte negativa do eixo x.
- $y_V > 0$, pois o vértice da parábola encontra-se na parte positiva do eixo y.
- $b < 0$, pois pela fórmula $x_V = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow b = -(x_V \cdot 2a)$, sendo $x_V < 0$ e $a < 0$.

Conclusão:

a	**b**	**c**	**Δ**	**x_1**	**x_2**	**x_v**	**y_v**
Negativo	Negativo	Negativo	Positivo	Negativo	Negativo	Negativo	Positivo
-	-	-	+	-	-	-	+

Logo, o produto é um número real positivo.

QUESTÃO 22 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

Podemos observar que:

$$a\#b = a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a\#b = (a - b) \cdot (a + b)$$

Assim, quando a e b são números consecutivos, com $a > b$, temos que $(a - b) = 1$ e, portanto, a operação $a\#b$ retorna apenas a soma dos dois números. Logo,

$$(2019\#2018) + (2017\#2016) + (2015\#2014) + \ldots + (5\#4) + (3\#2) + 1 =$$
$$= (2019 + 2018) + (2017 + 2016) + (2015 + 2014) + \cdots + (5 + 4) + (3 + 2) + 1$$

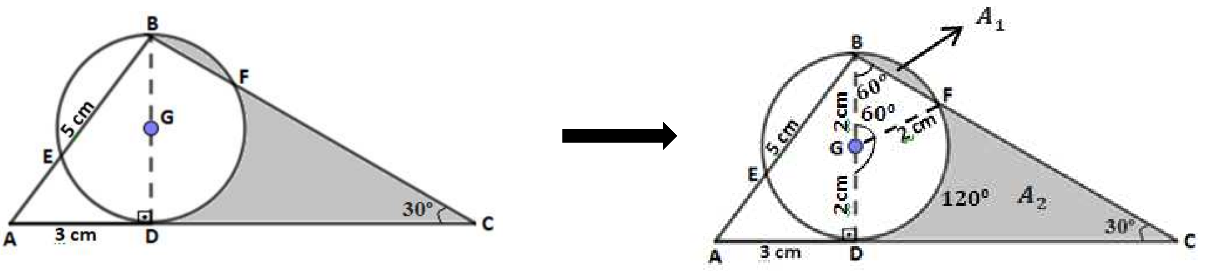
A soma que aparece é uma soma de progressão aritmética de razão 1. Assim,

$$S_{2019} = \frac{(2019 + 1) \cdot 2019}{2} =$$
$$= 1010 \cdot 2019 =$$
$$= 2039190$$

QUESTÃO 23 – GABARITO: E

RESOLUÇÃO:

Para facilitar o entendimento, utilizaremos a imagem a seguir para a resolução:



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD, temos

5² = 3² + $(\overline{\mathrm{BD}})^2 \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{25-9} \Leftrightarrow \overline{BD} = 4$ cm.

Como $\overline{\mathrm{BD}} = 4 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{BG}} = \overline{\mathrm{GD}} = \overline{\mathrm{GF}} = 2$ cm, pois G é centro da circunferência e $\overline{\mathrm{BD}}$ é o diâmetro.

O ângulo $D\hat{B}C = 60°$, já que os ângulos $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$ possuem valores de 30° e 90° respectivamente, assim, o arco $\widehat{DF}$=120° por representar o dobro do ângulo inscrito $D\hat{B}F$.

Assim, temos que o arco $\widehat{BF}$ = 60º e, consequentemente, o ângulo $B\hat{G}F$ também possui 60º por representar o ângulo central correspondente ao arco $\widehat{BF}$.

Desta forma, o triângulo GBF é equilátero com área $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\text{cm}^2$ e o setor circular BGF com área $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi.4}{6} = \frac{2\pi}{3}\text{cm}^2$.

Portanto, temos que $A_1 = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm}^2$.

Por outro lado, temos que $tg30° = \frac{4}{\overline{\mathrm{CD}}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{CD}} = \frac{4}{\mathrm{tg}\ 30°} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ cm.

Logo, a área do triângulo BCD é $\frac{\overline{\mathrm{CD}}\ .\ \overline{\mathrm{BD}}}{2} = \frac{4\sqrt{3}\ .\ 4}{2} = 8\sqrt{3}\text{cm}^2$.

E a área do setor circular DGF é $\frac{\pi r^2}{3} = \frac{4\pi}{3}\text{cm}^2$.

Então, temos que $A_2 = 8\sqrt{3} - \left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{24\sqrt{3} - 4\pi - 3\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{21\sqrt{3} - 4\pi}{3}\right)\text{cm}^2$.

Por fim, a área procurada é

S = $A_1 + A_2$ = $\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{21\sqrt{3} - 4\pi}{3}\right) = \left(\frac{18\sqrt{3} - 2\pi}{3}\right)\text{cm}^2$.

QUESTÃO 24 – GABARITO: A

RESOLUÇÃO:

Pode-se retirar uma verde e depois uma amarela, ou seja:

$$\frac{15}{60} \cdot \frac{20}{60} = \frac{300}{3600}$$

Ou pode-se retirar uma amarela e depois uma verde, ou seja:

$$\frac{20}{60} \cdot \frac{15}{60} = \frac{300}{3600}$$

Então:

$$P = \frac{300}{3600} + \frac{300}{3600} = \frac{600}{3600} = \frac{1}{6}$$

QUESTÃO 25 – GABARITO: B

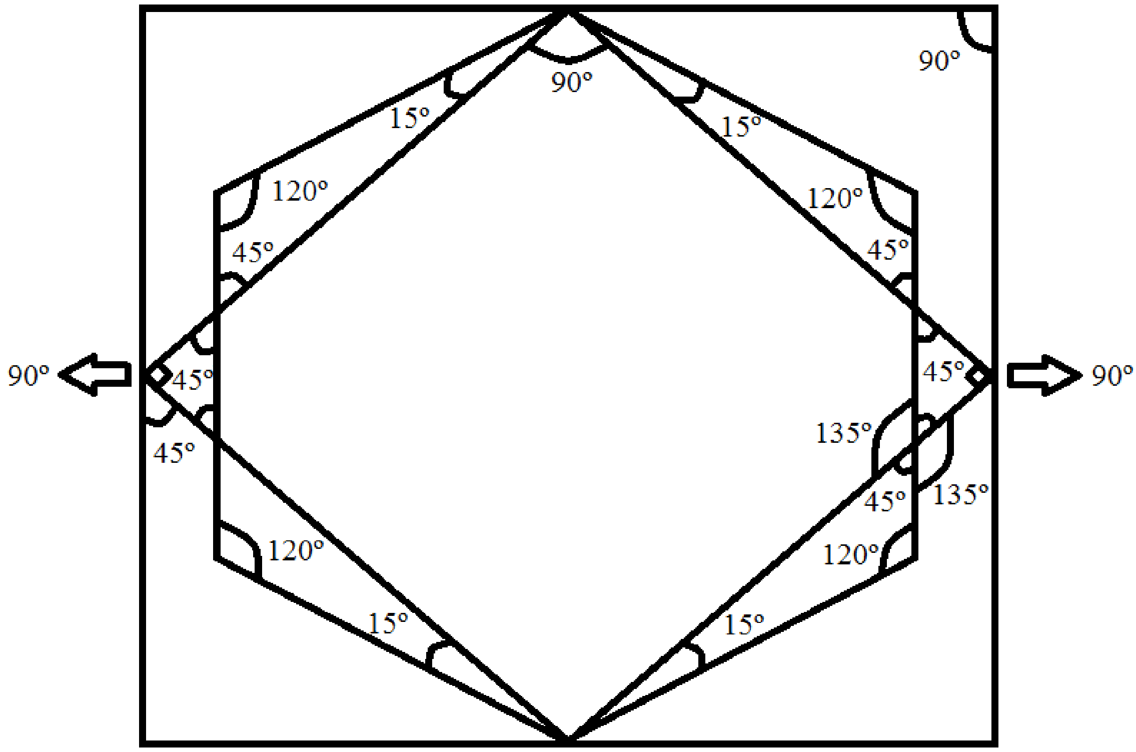
RESOLUÇÃO:

A soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S_n = (n-2).180°$, onde n é o número de lados. Para calcular o valor de cada ângulo interno (a_i) basta dividir a soma dos ângulos internos (S) pelo número de lados do polígono.

Utilizando a observação acima, para os polígonos regulares quadrado e hexágono temos:

Soma dos ângulos internos no quadrado $(n = 4)$	Soma dos ângulos internos no hexágono $(n = 6)$
$S_n = (n-2) \cdot 180°$ $S_4 = (4-2) \cdot 180°$ $S_4 = 2 \cdot 180°$ $S_4 = 360°$	$S_n = (n-2) \cdot 180°$ $S_6 = (6-2) \cdot 180°$ $S_6 = 4 \cdot 180°$ $S_6 = 720°$

Valor de todos os ângulos internos no quadrado $(n = 4)$	Valor de todos os ângulos internos no hexágono $(n = 6)$
$a_i = \frac{S_n}{n}$ $a_i = \frac{360°}{4}$ $a_i = 90°$	$a_i = \frac{S_n}{n}$ $a_i = \frac{720°}{4}$ $a_i = 120°$



$\alpha = 90°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 135°$, $\varphi = 45°$, $\theta = 120°$, $\lambda = 15°$, $\mu = 135°$ e $\rho = 90°$

- Ângulos pares: $\alpha = 90°$, $\theta = 120°$ e $\rho = 90°$
- Ângulos ímpares: $\beta = 45°$, $\gamma = 135°$, $\varphi = 45°$, $\lambda = 15°$ e $\mu = 135°$

Soma dos ângulos pares (S_p)	Soma dos ângulos ímpares (S_i)
$S_p = \alpha + \theta + \rho$ $S_p = 90° + 120° + 90°$ $S_p = 300°$	$S_i = \beta + \gamma + \varphi + \lambda + \mu$ $S_i = 45° + 135° + 45° + 15° + 135°$ $S_i = 375°$

Fazendo a divisão de S_p por S_i temos 0,8. Logo é uma dízima finita.

QUESTÃO 26 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

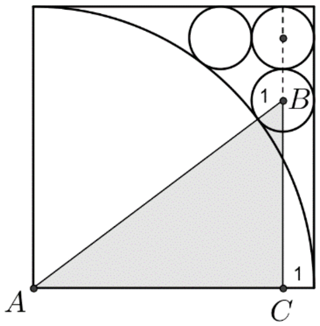
Existem 9 números que começam por 0 ($01, 02, \ldots, 09$), 10 números que iniciam por 1 ($10, 11, \ldots, 19$), 10 números que iniciam por 2 ($21, 21, \ldots, 29$), 10 números que iniciam por 3 ($30, 31, \ldots, 39$), 10 números que iniciam por 4 ($40, 41, \ldots, 49$) e 10 números que iniciam por 5 ($50, 51, \ldots, 59$).

Logo, o número de sorteios em que os 6 números começam com o mesmo algarismo é

$C_9^6 + 5 \cdot C_{10}^6 = 84 + 1050 = 1134.$

QUESTÃO 27 – GABARITO: E

RESOLUÇÃO:



Seja a o lado do quadrado. Construindo o triângulo ABC representado na figura ao lado temos:

$$AB = a + 1$$
$$AC = a - 1$$
$$BC = a - 3$$

Aplicando o teorema de Pitágoras temos

$$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + (a - 3)^2$$
$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 2a + 1 + a^2 - 6a + 9$$
$$a^2 - 10a + 9 = 0$$

As raízes são 1 e 9. Como $a = 1$ não faz sentido, então $a = 9$.

QUESTÃO 28 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

Seja S a soma dos três números de cada fila. Somando os números das quatro filas temos

$$4S = (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) + 1 + y + 3$$

pois os números que estão nas esquinas: 1, y e 3 se repetiram na soma acima.

Assim, $4S = 49 + y$ e, portanto, $49 + y$ precisa ser múltiplo de 4.

O primeiro múltiplo de 4 após 49 é $52 = 49 + 3$, mas $y = 3$ não é possível pois o 3 já está na figura. O próximo múltiplo de 4 é $56 = 49 + 7$ e, portanto, $y = 7$. Assim, $4S = 49 + 7 = 56$ e a soma dos três números de cada fila é $S = 14$ e considerando as filas da esquerda para a direita, duas já estão determinadas:

Segunda fila: $1 \ \ 6 \ \ 7$

Terceira fila: $7 \ \ 4 \ \ 3$

Os números ainda não utilizados são $2, 5, 8$ e 9. Fica claro que 5 e 8 estão na primeira fila e 2 e 9 na quarta fila. Como x e z devem ser os menores possíveis temos:

Primeira fila: $5 \ \ 8 \ \ 1$

Quarta fila: $3 \ \ 9 \ \ 2$

Assim, $x = 5$, $y = 7$ e $z = 2$ e $x + 2y + 3z = 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 25$.

QUESTÃO 29 – GABARITO: A

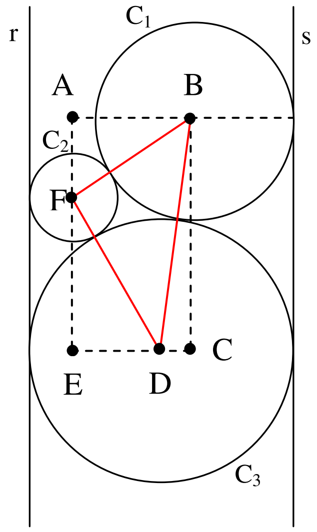
RESOLUÇÃO:

No exato instante em que Adriano consegue sair da ponte, Waldir já havia percorrido seis sétimos da ponte, pois, ambos possuem a mesma velocidade. Portanto, o trem deve percorrer, simultaneamente, uma distância sete vezes maior do que aquela percorrida por Waldir. Logo, a velocidade do trem é
$x = 7 \cdot 8 = 56km/h.$

QUESTÃO 30 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

O objetivo principal é determinar o raio de C_3, pois a espessura da parede é dobro do raio de C_3. Para tanto, é necessário construir alguns triângulos como representado na figura a seguir:



Chamaremos de r o raio da circunferência C_3.

É possível observar alguns triângulos retângulos: ABF, BCD, DEF, os quais valem a teorema de Pitágoras:

Para o triângulo ABF, sabemos que $FB = 4 + 9 = 13$ e que $AB = 2r - 13$, logo

$$FB^2 = AF^2 + AB^2$$
$$13^2 = AF^2 + (2r - 13)^2$$
$$AF^2 = 169 - (4r^2 - 52r + 169)$$
$$AF^2 = -4r^2 + 52r$$

Para o triângulo BCD, sabemos que $DB = r + 9$ e que $CD = r - 9$, logo

$$DB^2 = BC^2 + CD^2$$
$$(r + 9)^2 = BC^2 + (r - 9)^2$$
$$BC^2 = (r^2 + 18r + 81) - (r^2 - 18r + 81)$$
$$BC^2 = 36r$$

Para o triângulo DEF, sabemos que $FD = r + 4$ e que $ED = r - 4$, logo

$$FD^2 = ED^2 + FE^2$$

$$(r + 4)^2 = (r - 4)^2 + FE^2$$

$$FE^2 = (r^2 + 8r + 16) - (r^2 - 8r + 16)$$

$$FE^2 = 16r$$

Podemos observar ainda que,

$$BC = AF + FE$$

Logo,

$$BC^2 = (AF + FE)^2$$

$$BC^2 = AF^2 + FE^2 + 2 \cdot AF \cdot FE$$

$$36r = -4r^2 + 52r + 16r + 2 \cdot \sqrt{-4r^2 + 52r} \cdot \sqrt{16r}$$

$$4r^2 - 32r = 2 \cdot \sqrt{16r^2(-4r + 52)}$$

$$4r^2 - 32r = 2 \cdot 4r \cdot \sqrt{-4r + 52}$$

$$r - 8 = 2 \cdot \sqrt{-4r + 52}$$

$$(r - 8)^2 = \left(2 \cdot \sqrt{-4r + 52}\right)^2$$

$$r^2 - 16r + 64 = 4 \cdot (-4r + 52)$$

$$r^2 - 16r + 64 = -16r + 208$$

$$r^2 = 208 - 64$$

$$r^2 = 144$$

$$r = 12 \text{ cm}$$

Enfim, o raio da circunferência C_3 é 12 cm e, desse modo, a espessura da parede é 24 cm.