I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS INSTITUTOS FEDERAIS
RESOLUÇÃO DO SIMULADO

QUESTÃO 01 - RESOLUÇÃO

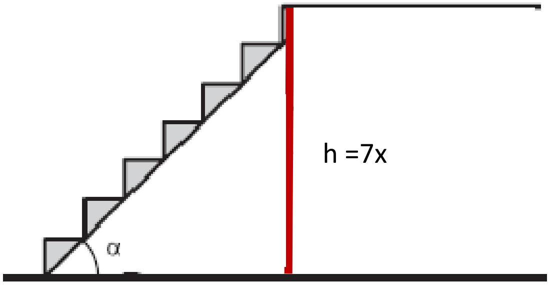
ALTERNATIVA: A

Sabe-se que o primeiro passa a informação para o segundo com a probabilidade de 2/3, o segundo para o terceiro 2/3, do terceiro para o quarto 2/3, do quarto para o quinto 2/3, do quinto para o sexto 2/3 e do sexto para o primeiro 2/3, ou seja, a probabilidade da brincadeira ser bem-sucedida é de $(2/3)^6 = 64/729$.

QUESTÃO 02 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Pode-se observar que a escada forma com o solo um triângulo retângulo, conforme a figura:



Como são 7 degraus, a altura de cada degrau (x) *será 7 vezes menor que a altura do triângulo* (h). *E convertendo o comprimento da rampa tem-se* $3{,}5m = 350cm$.
Desse modo,

$$sen(30°) = \frac{7x}{350} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{7x}{350} \Rightarrow 14x = 350 \Rightarrow x = 25cm$$

Logo, a altura de cada degrau é $25cm$.

QUESTÃO 03 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Na direção do veículo há 2 possibilidades. Nos outros assentos há possibilidade de 4! ocupações. Logo, o maior número de posições diferentes com a troca de qualquer número de passageiros que eles puderem realizar, sem que se repita uma disposição anterior, é igual a: 2.4! = 48.

QUESTÃO 04 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

O deslocamento do nível da água não tem relação com o material que cada um é composto. Depende unicamente dos volumes dos sólidos. Os volumes do prisma e do cilindro são iguais (V = área da base x altura) e são três vezes maiores que os volumes do cone e da pirâmide, que também são iguais (V = área da base x altura / 3). Logo, haverá maior mudança no nível dessa água no recipiente quando introduzirmos o cilindro ou o prisma.

QUESTÃO 05 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: E

Sabendo que a tangente de 45º é igual a 1 e que a tangente de 30º é igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$*, é possível calcular:*

$tg\ 30^o = \frac{BD}{AD}$ *e* $tg\ 45^o = \frac{BD}{CD}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{20+CD}$ *e* $1 = \frac{BD}{CD} \rightarrow CD = BD$

Então, como CD = BD,

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{20+BD} \rightarrow \frac{1,7}{3} = \frac{BD}{20+BD} \rightarrow 20 \cdot 1,7 + 1,7 \cdot BD = 3 \cdot BD \rightarrow 1,3 \cdot BD = 34$

$BD = \frac{34}{1,3} \approx 26,15$

Logo, a menor distância em linha reta da casa até o muro é de aproximadamente 26,15 metros.

QUESTÃO 06 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: A

Após a retirada dos quadrados dos cantos da caixa, a largura fica medindo (20-2x), o comprimento fica igual a (30-2x) e a altura da caixa é igual a x. Portanto, o volume é dado por $V(x) = (20-2x).(30-2x).x = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

QUESTÃO 07 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Seja x a quantidade inicial de bolinhas na piscina. Pelas informações fornecidas, nesta piscina inicial tem $0,20 \cdot x$ *bolinhas vermelhas e, portanto,* $0,80 \cdot x$ *bolinhas brancas.*

Seja y a quantidade de bolinhas vermelhas que se deve acrescentar na piscina para que a quantidade de bolinhas vermelhas seja igual à quantidade de bolinhas brancas. Neste caso, após o acréscimo, obtêm-se $(x+y)$ *bolinhas no total, sendo* $0,50 \cdot (x+y)$ *bolinhas vermelhas e* $0,50 \cdot (x+y)$ *bolinhas brancas.*

Como a quantidade absoluta de bolinhas brancas não se alterou ao longo do processo, pode-se afirmar que:

$$0,80 \cdot x = 0,50 \cdot (x+y)$$
$$0,80 \cdot x = 0,50 \cdot x + 0,50 \cdot y$$
$$0,30 \cdot x = 0,50 \cdot y$$
$$y = \frac{0,30}{0,50} \cdot x = \frac{30}{50} \cdot x$$
$$\boxed{y = 0,60 \cdot x}$$

Logo, com relação ao total de bolinhas vermelhas no início ($0,20 \cdot x$ *), a porcentagem de bolinhas que deve ser colocada na piscina (* $y = 0,60 \cdot x$ *) para que se consiga o que se pede é:*

$$\boxed{\frac{0,60 \cdot x}{0,20 \cdot x} = 3 = 300\%}$$

QUESTÃO 08 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Seja x o valor que o exercício pede, ou seja,

$$x = *(1) + *(2) + *(3) + ... + *(2017) + *(2018)$$

Desse modo,

$$x = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right) + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right)$$

$$x = 1 + \cancel{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \cancel{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)} + \cancel{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} + ... + \cancel{\left(-\frac{1}{2017} + \frac{1}{2017}\right)} + \cancel{\left(-\frac{1}{2018} + \frac{1}{2018}\right)} - \frac{1}{2019}$$

$$x = 1 - \frac{1}{2019}$$

$$\boxed{x = \frac{2018}{2019}}$$

QUESTÃO 09 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: B

A área que compreenderá a grama na praça será dada pela diferença entre as áreas das circunferências maior e menor, isto é,

$A = (R^2 – r^2)\ \pi$

$A = (40^2 – 30^2).\ 3{,}14 = 2198\ m^2$

QUESTÃO 10 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: C

Pelo princípio fundamental da contagem, tem-se que a quantidade de formas distintas de pintar a bandeira é 3.2.2.2 = 24 formas.

QUESTÃO 11 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: B

Segundo as informações do problema, pode-se afirmar que

$$N(0) = N_0 = 1000$$
$$e = 3$$
$$a = 4$$
$$N(t) = 16000$$
$$t = ?$$

Assim, $N(t) = N_0 \cdot e^{a \cdot t}$ *fica:*

$$16000 = 1000 \cdot 3^{4 \cdot t}$$
$$\frac{16000}{1000} = 3^{4 \cdot t}$$
$$16 = 3^{4 \cdot t}$$

Aplicando o logaritmo dos dois lados da igualdade, tem-se:

$$log\ (16) = log\ (3^{4 \cdot t})$$
$$log(16) = 4 \cdot t \cdot log\ (3)$$
$$log(2^4) = 4 \cdot t \cdot log\ (3)$$
$$4\, log(2) = 4 \cdot t \cdot log\ (3)$$
$$4 \cdot 0{,}3 = 4 \cdot t \cdot 0{,}4$$
$$1{,}2 = t \cdot 1{,}6$$
$$t = \frac{1{,}2}{1{,}6}$$
$$t = 0{,}75\ h$$
$$t = 0{,}75\ .\ 60 = 45\ min$$

Logo, o tempo necessário para que a população alcance a quantidade de 16000 indivíduos é de 45 minutos.

QUESTÃO 12 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: C

Para apresentar o conjunto (recipiente mais líquido) de maior peso em Newtons, será preciso seguir os seguintes passos:

1 – Calcular o volume de cada um dos recipientes;

2 – Multiplicar pela densidade para calcular a massa (m) de cada líquido (m = d . V);

3 – Somar 10 kg (massa do recipiente) para obter a massa do conjunto (M);

4 – Multiplicar por 10 para calcular o peso (P = M.g)

Desse modo,

A) $V = 0{,}5^3 = 0{,}125\ m^3 \rightarrow m = 0{,}125 \cdot 1000 = 125\ kg \rightarrow M = 125 + 10 = 135\ kg \rightarrow P = 135 \cdot 10 = 1350\ N$

B) $V = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}12\ m^3 \rightarrow m = 0{,}12 \cdot 900 = 108\ kg \rightarrow M = 108 + 10 = 118\ kg \rightarrow P = 118 \cdot 10 = 1180\ N$

C) $V = \pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}216\ m^3 \rightarrow m = 0{,}216 \cdot 720 = 155{,}52\ kg \rightarrow M = 155{,}52 + 10 = 165{,}52 \rightarrow P = 165{,}52 \cdot 10 = 1655{,}2\ N$

D) $V = \frac{4}{3}.\pi.0{,}3^3 = 0{,}108\ m^3 \rightarrow m = 0{,}108 \cdot 790 = 85{,}32\ kg \rightarrow M = 85{,}32 + 10 = 95{,}32\ kg \rightarrow P = 95{,}32 \cdot 10 = 953{,}2\ N$

E) $V = \frac{2}{3}.\pi.0{,}4^3 = 0{,}128\ m^3 \rightarrow m = 0{,}128 \cdot 780 = 99{,}84\ kg \rightarrow M = 99{,}84 + 10 = 109{,}84\ kg \rightarrow P = 109{,}84 \cdot 10 = 1098{,}4\ N$

Logo, a alternativa que possui o maior peso é a alternativa C.

QUESTÃO 13 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: D

Para obter os níveis de energia de ondas de rádio e ondas de raio gama, basta substituir os prefixos em cada uma das alternativas e verificar qual delas corresponde à onda de rádio e de raio gama, respectivamente.

Legenda: (V) Verdadeiro - o valor corresponde a energia pretendida

(F) Falso - O valor não corresponde a energia pretendida

	Energia ondas de rádio	***Energia raios gama***
A	*0,01 μeV = 0,01x10^{-6} eV = 1x10^{-8} eV (V)*	*0,01 MeV= 0,01x10^{6} eV = 1x10^{4} eV (F)*
B	*30 neV= 30x10^{-9} eV = 3x10^{-8} eV (V)*	*30 keV= 30x10^{3} eV= 3x10^{4} eV (F)*
C	*10 meV= 10x10^{-3} eV = 1x10^{-2} eV (F)*	*10keV= 10x10^{3} eV = 1x10^{4} eV (F)*
D	*0,002 meV = 0,002x10^{-3}eV = 2x10^{-6}eV (V)*	*0,002 GeV= 0,002x10^{9} eV = 2x10^{6} eV (V)*
E	*1 μeV= 1x10^{-6} eV (V)*	*1 keV= 1x10^{3} eV (F)*

A alternativa D apresenta verdadeiro (V) tanto para as ondas de rádio quanto para os raios gama.

QUESTÃO 14 – RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA: B

Analisando as duas propostas:

a) aplicando desconto a juros simples:

$$Resgate = 2.000 \times (\frac{100-2.2}{100}) + 2.000 \times (\frac{100-2.3}{100})$$
$$Resgate = 2.000 \times 0{,}96 + 2.000 \times 0{,}94$$
$$Resgate = 1920 + 1880$$
$$Resgate = 3.800$$

Então, o cliente receberá o resgate de R$3.800,00.

b) aplicando desconto a juros compostos:

$$Resgate = 2.000 \times (\frac{100-2.2}{100})^2 + 2.000 \times (\frac{100-2.3}{100})^3$$
$$Resgate = 2.000 \times 0{,}9604 + 2.000 \times 0{,}941192$$
$$Resgate = 1920{,}80 + 1882{,}38$$
$$Resgate = 3.803{,}18$$

Então, o cliente receberá o resgate de R$3.803,18.

Logo, o banco aceita a proposta do cliente e o cliente receberá aproximadamente R$ 3.803,18 pelo resgate.